关于一道高中物理光学的速度关联问题探究

浙江临海市回浦中学 沈纪中

【摘要】关于一束光的反射光和折射光在同一个光屏上速度的关联问题，本文通过设定角度和折射率的函数关系，推导出了反射光和折射光在光屏上的速度之比与角度的关系。进一步通过函数图像的性质，证明了该比值在一定范围内单调递减，并给出了比值的范围。最后通过 GeoGebra 软件进行了画图验证还提出了简短证明的方法。

一、问题引入

最近碰到了一道光学题，研究一束光斜射入一个界面时的反射光和折射光在同一个光屏上的速度比值随角度如何变化呢？这种变化具有怎样的规律呢？本文以一道高中物理光学题为例，通过不同方法的探究寻找光学中这两者速度关联问题。

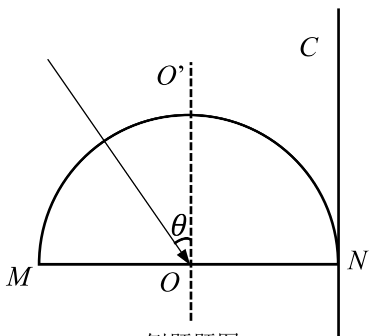
【例题】半圆形玻璃砖的横截面如图所示，*O* 点为圆心，*OO′* 为直径 *MN* 的垂线，足够大的光屏 *CD* 与直径 *MN* 垂直并接触于 *N* 点。一束含两种不同频率的激光束沿半径方向射向圆心 *O* 点，当入射光线与 *OO'* 夹角θ=37°，光屏 *CD* 从上到下恰好出现两个光斑点 *P* 和 *Q*(未画出)。则下列说法正确的是（　　）

A.*OQ* 光束有两种色光

B.频率较小的激光 n=1.67

C.射入玻璃砖的光线能量等于打在 *PQ* 上的光线能量

D.若 *OP* 与 *OQ* 垂直，则入射光线逆时针转动一个极小角度，两光斑向 *N* 点移动相同距离



例题题图

【分析】

根据这道光学题 *D* 选项的条件“若 *OP* 与 *OQ* 垂直，则入射光线逆时针转动一个极小角度，两光斑向 *N* 点移动相同距离。”要解决这个问题可以将这里的位移问题转化为速度问题，只需要证明两光斑在光屏上移动的速度大小是否相等。

二、问题解决

如图 1 所示，反射光和折射光在 *CD* 光屏上的光斑分别为 *P* 和 *Q* 点，设反射光线 *OP* 以线段 *OP* 为半径绕 *O* 点转动一个极小角度时的 *P* 处的速度为v_1，折射光线 *OQ* 以 *OQ* 线段为半径绕 *O* 点转动一个极小角度时的 *Q* 处的速度为v_2。如图 2 所示，对v_1进行分解。设半圆形玻璃砖

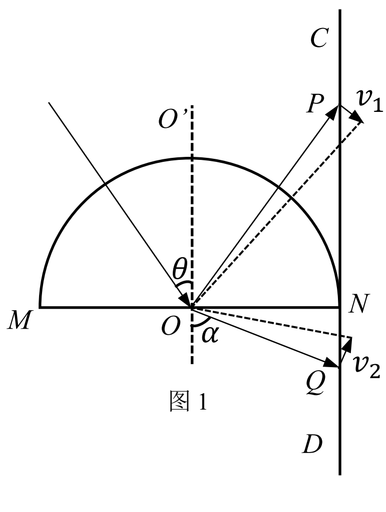


图 1

的半径为 R，OP=r，入射光转动的角速度大小为ω，则入射角$\theta=\omega t$，$OP=r=\frac{R}{\sin\theta}$。

反射光在光屏 CD 的速度：

$$v_{反射}=\frac{\omega r}{\sin\theta}=\frac{\omega R}{\sin^2\omega t}$$

根据折射率公式：

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega t}$$

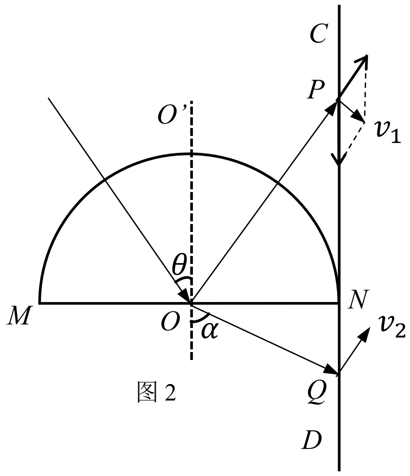


图 2

由题意可知，当光屏 CD 从上到下恰好出现两个光斑时，说明此时折射率为$n=1.67$的激光恰好发生全反射，则入射光转动角度的范围为$\theta\in\left[\sin^{-1}\frac{1}{n_1},\sin^{-1}\frac{1}{n_2}\right](n_1=1.67>n_2)$。

折射光打在光屏 CD 上的点 Q 与 MN 的距离：

$$x_{折射}=\frac{R}{\tan\alpha}=\frac{R\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{R\cos\alpha}{n\sin\omega t}=R\sqrt{\frac{1}{n^2\sin^2\omega t}-1}$$

对$x_{折射}$求导可求解$v_{折射}$，则

$$v_{折射}=\frac{dx_{折射}}{dt}=\frac{R\omega\cos\omega t}{n^2\sin^3\omega t}\sqrt{\frac{n^2\sin^2\omega t}{1-n^2\sin^2\omega t}}$$

$$v_{折射}=\frac{R\,\omega\cos\omega t}{n\sin^2\omega t}\sqrt{\frac{1}{1-n^2\sin^2\omega t}}$$

反射光线与折射光线在光屏 CD 上的光斑沿屏的速度之比：

$$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}=n\sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$$

当反射光与折射光线垂直时，即$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

代入

$$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}=n\sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$$

得到

$$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}=1$$

即入射光线逆时针转动一个极小角度，两光斑向 N 点移动的速度相等，也移动了相同的距离。

三、探究光斑移动速度比的规律

根据前面得到的反射光线与折射光线在光屏 CD 上的光斑沿屏的速度之比，$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}=n\sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$，通过分析其函数图像性质，探究同种激光的两光斑在光屏 CD 上的速度比随着入射角的变化规律，此时$\theta\in\left[0,\sin^{-1}\frac{1}{n}\right]$。

令：

$$f(\theta)=n\sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$$

设$x=\sin^2\theta$：

$$g(x)=n\sqrt{\frac{1-n^2x}{1-x}}$$

对上式求导，得

$$g'(x)=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1-n^2x}}\frac{(1-n^2)}{(1-x)^2}<0(n>1)$$

即$f(\theta)$在 $\theta\in\left[0,\sin^{-1}\frac{1}{n}\right]$单调递减。

可知函数的最大值和最小值分别为：

$$f(\theta)_{max}=f(0)=n$$

$$f(\theta)_{min}=f\left(\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

从而可以得出$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}$的范围：

$$\frac{v_{反射}}{v_{折射}}\in[0,n]$$

四、用 GeoGebra 画图验证

GeoGebra 是一款优秀的函数图像处理工具，它能够绘制各种函数图像，并且可以实时动态地展示函数的变化过程，有助于深入理解函数的性质和变化规律。通过输入数学表达式，利用 GeoGebra 的内置数学功能对数据进行处理，并生成精准的函数图像。这一过程能够提供直观的视觉展示，使复杂的数学关系变得一目了然。

绘制折射率 n 分别为 1.1，1.5，2 条件下两光斑移动速度比与角度θ的关系图。

图 3（折射率 n=1.5）

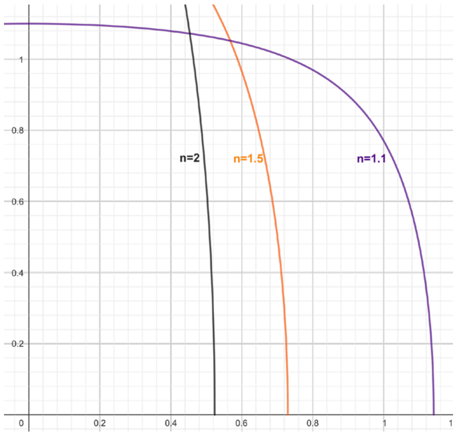


图 4

通过软件函数运算功能可得，当 $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$ 时， $\theta=\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$，函数值为 1。

通过软件作图可以发现，函数在一定范围内单调递减且值域范围为$[0,n]$。

五、简证

上述方法比较繁琐，可以探究一般规律。如果只是根据题设要求是反射光线与折射光线垂直时的情况，也可做以下简单快捷的证明：

设入射角为θ，折射角为α，此时$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$。

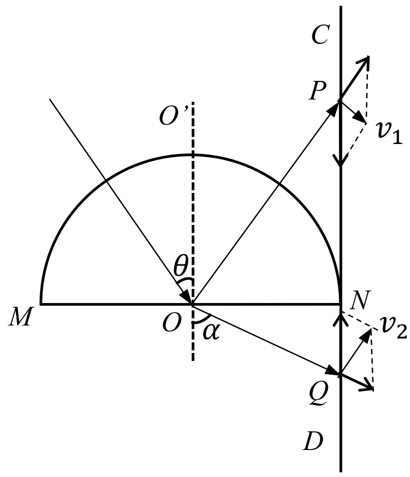


图 5

如图 5 所示，分别对v_1和v_2进行分解，要证明两光斑向 N 点移动相同距离只需要证明两光斑在光屏上移动的速度大小相等，即v_1和v_2沿光屏方向的分速度大小相等，即

要证：$\frac{v_1}{\cos\alpha}=\frac{v_2}{\cos\theta}$，则$\frac{v_1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{v_2}{\cos\theta}$

对式子变形：$\frac{v_1}{v_2}=\tan\theta$

根据速度分解可得：

$$v_1=\frac{\omega_1 R}{\sin\theta}$$

$$v_2=\frac{\omega_2 R}{\cos\theta}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2\tan\theta}$$

即证： $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\tan^2\theta$

根据折射率公式可知：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = n = \frac{1}{\tan\theta}$$

令函数：

$$f(t) = \sin\alpha = n\sin\theta$$

因为反射光线与折射光线的夹角为 90°：

$$(\sin\alpha)' = \cos\alpha\,\alpha'(t) = \sin\theta\alpha'(t) = \sin\theta\omega_2$$

$$(\sin\theta)' = \cos\theta\,\theta'(\mathrm{t}) = \cos\theta\omega_1$$

对函数求导可得：

$$f'(t) = \sin\theta\omega_2 = n\cos\theta\omega_1$$

解得：

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\theta}{n\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{n} = \tan^2\theta$$

证毕，可以得出“若 OP 与 OQ 垂直，则入射光线逆时针转动一个极小角度，两光斑向 N 点移动相同距离”的结论。

简证从光的“圆周运动”线速度入手，通过线状物体速度分解得出两光斑在屏上的移动速度。原始证明中求折射光斑的移动速度也可以用此方法，求反射光斑的移动速度也可用较为复杂的位移求导法，本文不再赘述。